

SAUL A. KRIPKE

CONSIDERAZIONI SEMANTICHE
SULLA LOGICA MODALE *

In questo scritto intendo esporre alcuni punti di una teoria semantica della logica modale.¹ Per una certa estensione quantificata di S5 tale teoria era stata presentata in "A Completeness Theorem in Modal Logic",² ed è stata riassunta in "Semantical Analysis of Modal Logic".³ Il presente saggio riguarderà soprattutto un aspetto della teoria, ossia l'introduzione dei quantificatori, e sarà limitato principalmente a uno dei metodi diretti a questo scopo. L'accento dello scritto sarà puramente semantico, e quindi esso trascurerà l'uso delle tavole semantiche, essenziali per una completa presentazione della teoria.⁴ Le dimostrazioni, inoltre, saranno in larga misura eliminate.

Consideriamo quattro sistemi modali. Le formule A, B, C, \dots sono ottenute da formule atomiche P, Q, R, \dots per mezzo dei connettivi \wedge, \sim e \Box . Il sistema M ha i seguenti schemi di assiomi e le seguenti regole:

A0. Tautologie vero-funzionali :

* Da *Acta Philosophica Fennica*, 16, 1963, pp. 83-94. Ristampato per concessione dell'autore e della Societas Philosophica Fennica, Helsinki.

¹ La teoria presentata qui ha punti di contatto con molti autori: per un elenco di questi, cfr. S. Kripke, "Semantical Analysis of Modal Logic", *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9, 1963, pp. 67-96, e J. Hintikka, "Modality and Quantification", *Theoria*, 27, 1961, pp. 119-28. Gli autori più vicini a questa teoria sembrano essere Hintikka e Kanger. Il presente trattamento della quantificazione, tuttavia, è unico (per quanto ne so), sebbene tragga ispirazione in certa misura dalla conoscenza dei metodi molto differenti di Prior e Hintikka.

² *Journal of Symbolic Logic*, 24, 1959, pp. 1-15.

³ *Ibid.*, pp. 323-4. (Compendio).

⁴ Per queste cfr. "A Completeness Theorem in Modal Logic", *Journal of Symbolic Logic*, 24, 1959, pp. 1-15 e "Semantical Analysis of Modal Logic", *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9, pp. 67-96,

$$A1. \Box A \supset A$$

$$A2. \Box(A \supset B) \supset \Box A \supset \Box B$$

$$R1. A, A \supset B / B$$

$$R2. A / \Box A$$

Se aggiungiamo il seguente schema d'assioma, otteniamo S4:

$$\Box A \supset \Box \Box A$$

Otteniamo il sistema *brouweriano* se aggiungiamo a M

$$A \supset \Box \Diamond A$$

e S5 se aggiungiamo

$$\Diamond A \supset \Box \Diamond A$$

I sistemi modali i cui teoremi sono chiusi rispetto alle regole R1 e R2, e che includono tutti i teoremi di M , sono detti "normali". Sebbene abbiamo sviluppato una teoria che si applica anche a sistemi non normali come S2 e S3 di Lewis, ci limiteremo qui a sistemi normali.

Per ottenere una semantica per la logica modale, introduciamo la nozione di *struttura modello* (normale). Una struttura modello (s.m.) è una tripla ordinata (G, K, R) , dove K è un insieme, R una relazione riflessiva su K , e $G \in K$. Intuitivamente, noi vediamo le cose in questo modo: K è l'insieme di tutti i "mondi possibili", G è il "mondo reale". Se H_1 e H_2 sono due mondi, $H_1 R H_2$ significa intuitivamente che H_2 è "possibile relativamente a" H_1 , cioè che ogni proposizione vera in H_2 è possibile in H_1 . Evidentemente, quindi, la relazione R deve essere riflessiva: ogni mondo H è infatti possibile relativamente a se stesso, poiché ogni proposizione vera in H è, a fortiori, possibile in H . La riflessività è quindi un requisito naturale da un punto di vista intuitivo. Possiamo imporre condizioni aggiuntive, corrispondenti ai vari "assiomi di riduzione" della logica modale: se R è transitiva, diremo che (G, K, R) è una s.m. S4; se R è simmetrica, (G, K, R) sarà una s.m. *brouweriana*; e se R è una relazione di equivalenza, (G, K, R) sarà una s.m. S5. Una struttura modello senza limitazioni è anche chiamata struttura modello M .

Per completare il quadro, abbiamo bisogno della nozione di *modello*. Data una struttura modello (G, K, R) , un *modello* as-

segna a ogni formula atomica (variabile proposizionale) P un valore di verità V o F in ogni mondo $H \in K$. Formalmente, un modello φ su una s.m. (G, K, R) è una funzione binaria $\varphi(P, H)$, dove P varia sulle formule atomiche e H sugli elementi di K , e il cui codominio è l'insieme $\{V, F\}$. Dato un modello, possiamo definire per induzione le assegnazioni di valori di verità a formule non atomiche. Assumiamo che $\varphi(A, H)$ e $\varphi(B, H)$ siano stati già definiti per ogni $H \in K$. Pertanto, se $\varphi(A, H) = \varphi(B, H) = V$, allora stabiliamo per definizione che $\varphi(A \wedge B, H) = V$; altrimenti $\varphi(A \wedge B, H) = F$. $\varphi(\sim A, H)$ è definito come F se e solo se $\varphi(A, H) = V$; altrimenti, $\varphi(\sim A, H) = V$. Infine, stabiliamo per definizione che $\varphi(\Box A, H) = V$ se e solo se $\varphi(A, H') = V$ per ogni $H' \in K$ tale che HRH' ; altrimenti $\varphi(\Box A, H) = F$. Intuitivamente, questa condizione asserisce che A è necessaria in H se e solo se A è vera in tutti i mondi H' possibili relativamente a H .

Teorema di completezza. $\vdash A$ in M (S4, S5, il sistema brouweriano) se e solo se $\varphi(A, G) = V$ per ogni modello φ su una struttura modello M (S4, S5, brouweriana) (G, K, R) .⁵

Questo teorema di completezza garantisce l'equivalenza della nozione sintattica di *dimostrabilità* in un sistema modale e della nozione semantica di *validità*.

Il resto di questo scritto riguarda, escludendo alcune osservazioni conclusive, l'introduzione dei quantificatori. Per ottenere questo risultato, noi dobbiamo associare a ogni mondo un dominio di individui, gli individui che esistono in quel mondo. Formalmente, definiamo una *struttura modello quantificazionale* (s.m.q.) come una struttura modello (G, K, R) insieme con una funzione ψ che assegna a ogni $H \in K$ un insieme $\psi(H)$, detto *dominio di H*. Intuitivamente $\psi(H)$ è l'insieme di tutti gli individui esistenti in H . Si noti che, naturalmente, $\psi(H)$ non deve necessariamente essere lo stesso insieme per argomenti H diversi, proprio come, da un punto di vista intuitivo, in mondi diversi da quello reale possono essere assenti alcuni individui che attualmente esistono, e possono apparire nuovi individui, come Pegaso.

Possiamo allora aggiungere ai simboli della logica modale una lista infinita di variabili individuali x, y, z, \dots e, per ogni intero non negativo n , una lista di lettere predicative n -adiche

⁵ Per una dimostrazione, cfr. "Semantical Analysis...", *Zeitschrift...*, 9.

P^n, Q^n, \dots (gli esponenti saranno tralasciati quando si potranno intendere dal contesto). Consideriamo le variabili proposizionali (formule atomiche) lettere predicative "0-adiche". Costruiamo quindi le formule ben formate nel modo solito, e possiamo quindi prepararci a definire un modello quantificazionale.

Per definire un modello quantificazionale, dobbiamo estendere la nozione originale, che assegnava un valore di verità a ogni formula atomica in ogni mondo. Analogamente, dobbiamo supporre che in ogni mondo una data lettera predicativa n -adica determini un certo insieme di n -ple ordinate, cioè la sua *estensione* in quel mondo. Consideriamo, per esempio, il caso di una lettera predicativa monadica $P(x)$. Noi vorremmo dire che, nel mondo H , il predicato $P(x)$ è vero di alcuni individui in $\psi(H)$ e falso di altri; formalmente, vorremmo dire che relativamente a certe assegnazioni di elementi di $\psi(H)$ a x , $\varphi(P(x), H) = V$, e relativamente ad altre $\varphi(P(x), H) = F$. L'insieme di tutti gli individui di cui P è vero è detto *estensione di P in H*. C'è però un problema: $\varphi(P(x), H)$ deve ricevere un valore di verità quando a x è assegnato un valore nel dominio di un qualche altro mondo H' ma non nel dominio di H ? Intuitivamente, supponendo che $P(x)$ significhi " x è calvo", dobbiamo assegnare un valore di verità all'esempio, ottenuto per sostituzione, "Sherlock Holmes è calvo"? Holmes non esiste, ma in altri stati di cose egli avrebbe potuto esistere. Dobbiamo assegnare un valore di verità definito all'asserzione che egli è calvo o no? Frege⁶ e Strawson⁷ non assegnerebbero all'asserzione un valore di verità, Russell sì.⁸ Ai fini della logica modale, sosteniamo che differenti risposte a questa domanda rappresentano *convenzioni* alternative. Tutte sono sostenibili. Le sole discussioni esistenti intorno a questo problema di cui io sia a conoscenza - quelle di Hintikka⁹ e Prior¹⁰ - adottano la posizione di Frege-Strawson. Tale posizione conduce necessariamente ad alcune modifiche della logica modale comune. La ragione è che la semantica per la logica modale proposizionale,

⁶ G. Frege, "Über Sinn und Bedeutung", cit.

⁷ P. F. Strawson, "On referring", *Mind*, n. s., 59, 1950, pp. 320-44. [Trad. in *La struttura logica del linguaggio*, a cura di Andrea Bonomi, cit., pp. 197-224].

⁸ Bertrand Russell, "On denoting", cit.

⁹ "Modality and Quantification".

¹⁰ A. N. Prior, *Time and modality*, Oxford, Clarendon Press, 1957, pp. VIII+148.

che abbiamo già dato, assumeva che ogni formula dovesse ricevere un valore di verità in ogni mondo, mentre, per una formula $A(x)$ contenente una variabile libera x , la posizione di Frege-Strawson esige che essa non riceva un valore di verità in un mondo H quando alla variabile x sia assegnato un individuo che non è contenuto nel dominio di quel mondo. Non possiamo quindi più aspettarci che le leggi originali della logica proposizionale modale valgano per asserzioni contenenti variabili libere, e siamo posti di fronte a una scelta: rivedere la logica proposizionale modale o limitare la regola di sostituzione. Prior sceglie la prima alternativa, Hintikka la seconda. Vi sono ulteriori dilemmi che la posizione di Frege-Strawson comporta. Dobbiamo assumere che $\Box A$ (in H) significhi che A è vera in tutti i mondi possibili (relativamente a H), o soltanto che essa non è falsa in tali mondi? La seconda alternativa richiede soltanto che A sia vera o manchi di valore di verità in ogni mondo. Prior, nel suo sistema Q , ammette in realtà entrambi i tipi di necessità, indicando l'uno con "L" e l'altro con "NMN". Un problema analogo nasce per la congiunzione: se A è falsa e B è priva di valore di verità, dobbiamo considerare $A \wedge B$ falsa o priva di valore di verità?

In una esposizione completa della teoria semantica, prenderemo in esame tutte queste varianti della posizione di Frege-Strawson. Qui adotteremo l'altra alternativa, e assumeremo che un'asserzione contenente variabili libere abbia un valore di verità in ogni mondo per ogni assegnazione alle sue variabili libere.¹¹ Formalmente, ci esprimiamo come segue. Sia $U = \cup_{H \in K} \psi(H)$. U^n è l' n -simo prodotto cartesiano di U con se stesso. Definiamo un modello quantificazionale su una s.m.q. (G, K, R) come una funzione binaria $\varphi(P^n, H)$, dove la prima variabile varia su lettere predicative n -adiche, per n arbitrario,

¹¹ È naturale assumere che un predicato atomico sia falso, in un mondo H , di tutti gli individui che non esistono in quel mondo, cioè che l'estensione di una lettera predicativa consista di individui effettivamente esistenti. Possiamo ottenere ciò richiedendo semanticamente che $\varphi(P^n, H)$ sia un sottoinsieme di $[\psi(H)]^n$; il trattamento semantico dato più avanti sarà sufficiente senza ulteriori cambiamenti. Avremmo dovuto aggiungere al sistema assiomatico dato sotto tutte le chiusure delle formule della forma $P^n(x_1, \dots, x_n) \wedge (y)A(y) \cdot \supset \cdot A(x_i)$ ($1 \leq i \leq n$). Abbiamo scelto di non fare così perché la regola di sostituzione non varrebbe più: per le formule atomiche varrebbero teoremi non più validi quando le formule atomiche siano sostituite da formule arbitrarie. (Ciò costituisce una risposta a un interrogativo sollevato da Putnam e Kalmar).

e H varia su elementi di K . Se $n = 0$, $\varphi(P^n, H) = V$ o F ; se $n \geq 1$, $\varphi(P^n, H)$ è un sottoinsieme di U^n . Definiamo ora induttivamente, per ogni formula A e ogni $H \in K$, un valore di verità $\varphi(A, H)$, relativamente a una data assegnazione di elementi di U alle variabili libere di A . Il caso delle variabili proposizionali è ovvio. Per una formula atomica $P^n(x_1, \dots, x_n)$, dove P^n è una lettera predicativa n -adica e $n \geq 1$, data un'assegnazione di elementi a_1, \dots, a_n di U a x_1, \dots, x_n , stabiliamo per definizione che $\varphi(P^n(x_1, \dots, x_n), H) = V$ se la n -pla (a_1, \dots, a_n) è un membro di $\varphi(P^n, H)$; altrimenti, $\varphi(P^n(x_1, \dots, x_n), H) = F$, relativamente all'assegnazione data. Date queste assegnazioni per formule atomiche, possiamo costruire per induzione le assegnazioni per formule complesse. I passi induttivi per i connettivi proposizionali \wedge, \sim, \Box sono già stati dati. Assumiamo di avere una formula $A(x, y_1, \dots, y_n)$, dove x e le y_i sono le sole variabili libere presenti, e assumiamo che sia stato definito un valore di verità $\varphi(A(x, y, \dots, y_n), H)$ per ogni assegnazione alle variabili libere di $A(x, y_1, \dots, y_n)$. Allora stabiliamo per definizione che $\varphi((x)A(x, y_1, \dots, y_n), H) = V$, relativamente a un'assegnazione di b_1, \dots, b_n a y_1, \dots, y_n (dove i b_i sono elementi di U), se $\varphi(A(x, y_1, \dots, y_n), H) = V$ per ogni assegnazione di a, b_1, \dots, b_n rispettivamente a x, y_1, \dots, y_n , dove $a \in \psi(H)$; altrimenti $\varphi((x)A(x, y_1, \dots, y_n), H) = F$ relativamente all'assegnazione data. Si noti che la limitazione $a \in \psi(H)$ significa che in H noi quantifichiamo solo sugli oggetti effettivamente esistenti in H .

Per illustrare la semantica, diamo dei controesempi a due proposte piuttosto familiari di leggi per la teoria della quantificazione modale, ossia la "formula di Barcan" $(x)\Box A(x) \supset \Box(x)A(x)$ e la sua conversata $\Box(x)A(x) \supset (x)\Box A(x)$. Per entrambe noi consideriamo una struttura modello (G, K, R) , dove $K = \{G, H\}$, $G \neq H$ e R è semplicemente il prodotto cartesiano K^2 . Evidentemente R è riflessiva, transitiva e simmetrica, e quindi le nostre considerazioni si applicano anche a S5.

Per la formula di Barcan, estendiamo (G, K, R) a una struttura modello quantificazionale stabilendo per definizione che $\psi(G) = \{a\}$, $\psi(H) = \{a, b\}$, per a e b distinti. Definiamo quindi, per una lettera predicativa monadica P , un modello φ in cui $\varphi(P, G) = \{a\}$, $\varphi(P, H) = \{a\}$. Allora evidentemente $\Box P(x)$ è vera in G quando x è assegnato a , e poiché a è l'unico oggetto nel dominio di G , è vera anche $(x)\Box P(x)$. Ma $(x)P(x)$ è chiaramente falsa in H (in quanto $\varphi(P(x), H) = F$ quando x è

assegnato b), e quindi $\Box(x)P(x)$ è falsa in \mathbf{G} . Abbiamo in tal modo un controesempio rispetto alla formula di Barcan. Si noti che tale controesempio è del tutto indipendente dal fatto che a $P(x)$ sia assegnato o meno un valore di verità in \mathbf{G} quando a x è assegnato b , e che quindi esso si applica anche ai sistemi di Hintikka e Prior. Tali controesempi possono essere respinti, e la formula di Barcan ristabilita, solo se richiediamo che una struttura modello soddisfi la condizione che $\psi(\mathbf{H}') \subseteq \psi(\mathbf{H})$ ogniqualvolta \mathbf{HRH}' ($\mathbf{H}, \mathbf{H}' \in \mathbf{K}$).

Per la conversa della formula di Barcan, poniamo $\psi(\mathbf{G}) = \{a, b\}$, $\psi(\mathbf{H}) = \{a\}$, dove ancora $a \neq b$. Definiamo $\varphi(P, \mathbf{G}) = \{a, b\}$, $\varphi(P, \mathbf{H}) = \{a\}$, dove P è una lettera predicativa monadica data. Allora evidentemente $(x)P(x)$ vale tanto in \mathbf{G} che in \mathbf{H} , cosicché $\varphi(\Box(x)P(x), \mathbf{G}) = \mathbf{V}$. Ma $\varphi(P(x), \mathbf{H}) = \mathbf{F}$ quando a x è assegnato b , cosicché, quando a x è assegnato b , $\varphi(\Box P(x), \mathbf{G}) = \mathbf{F}$. Quindi $\varphi((x)\Box P(x), \mathbf{G}) = \mathbf{F}$, e noi abbiamo il controesempio desiderato rispetto alla conversa della formula di Barcan. Tale controesempio, tuttavia, dipende dall'affermazione che, in \mathbf{H} , $P(x)$ è effettivamente *falsa* quando a x è assegnato b : esso potrebbe quindi scomparire se, per questa assegnazione, $P(x)$ fosse dichiarata priva di valore di verità in \mathbf{H} . In tal caso avremo ancora un controesempio se richiederemo che un'asserzione necessaria debba essere *vera* in tutti i mondi possibili (la "L" di Prior), ma non se richiederemo soltanto che essa non debba mai esser falsa (la "NMN" di Prior). In base alla nostra presente convenzione, possiamo eliminare il controesempio solo richiedendo che, per ogni s.m.q., $\psi(\mathbf{H}) \subseteq \psi(\mathbf{H}')$ ogniqualvolta \mathbf{HRH}' .

Questi controesempi conducono a una particolare difficoltà. Noi abbiamo dato dei contromodelli, in S5 quantificato, tanto per la formula di Barcan che per la sua conversa. Sembra tuttavia che Prior abbia dimostrato¹² che la formula di Barcan è derivabile in S5 quantificato, e la conversa sembra derivabile anche in M quantificato in base alla seguente argomentazione:

- (A) $(x)A(x) \supset A(y)$ (per teoria della quantificazione)
- (B) $\Box((x)A(x) \supset A(y))$ (per necessitazione)
- (C) $\Box((x)A(x) \supset A(y)) \supset \Box(x)A(x) \supset \Box A(y)$ (Assioma A2)
- (D) $\Box(x)A(x) \supset \Box A(y)$ (da (B) e (C))

¹² Cfr. "Modality and Quantification in S5", *Journal of Symbolic Logic*, 21, 1956.

- (E) $(y)(\Box(x)A(x) \supset \Box A(y))$ (generalizzando su (D))
- (F) $\Box(x)A(x) \supset (y)\Box A(y)$ (per teoria della quantificazione, e (E))

Sembra che abbiamo derivato la conclusione facendo uso di principi che dovrebbero essere tutti validi nella teoria dei modelli. In realtà, l'errore si trova nell'applicazione della necessitazione a (A). In una formula come (A), diamo alle variabili libere l'interpretazione di generalità:¹³ quando è asserita come teorema, (A) abbrevia l'asserzione della sua chiusura universale ordinaria

$$(A') (y)((x)A(x) \supset A(y))$$

Ora, se applichiamo la necessitazione a (A'), otteniamo

$$(B') \Box(y)((x)A(x) \supset A(y))$$

D'altra parte, (B) stesso è interpretato come asserente

$$(B'') (y)\Box((x)A(x) \supset A(y))$$

Per inferire (B'') da (B'), avremmo bisogno di una legge della forma $\Box(y)C(y) \supset (y)\Box C(y)$, che è proprio la conversa della formula della Barcan che tentavamo di dimostrare. Di fatto, si verifica facilmente che (B'') non è vera nel contromodello dato sopra per la conversa della formula di Barcan, se sostituiamo $A(x)$ con $P(x)$.

Possiamo evitare questo tipo di difficoltà se, seguendo Quine,¹⁴ formuliamo la teoria della quantificazione in modo tale

¹³ Non si asserisce che l'interpretazione di generalità dei teoremi contenenti variabili libere sia la sola possibile. Si potrebbe volere che una formula A sia dimostrabile se e solo se, per ogni modello φ , $\varphi(A, \mathbf{G}) = \mathbf{V}$ per ogni assegnazione alle variabili libere di A . Ma in questo caso $(x)A(x) \supset A(y)$ non sarebbe un teorema: infatti, nel contromodello dato sopra per la formula della Barcan, $\varphi((x)P(x) \supset P(y), \mathbf{G}) = \mathbf{F}$ se a y è assegnato b . La teoria della quantificazione dovrebbe quindi essere corretta seguendo le direzioni proposte da Hintikka (in "Existential Presuppositions and Existential Commitments", *Journal of Philosophy*, 56, 1959, pp. 125-37) e da H. Leblanc e T. Hailperin (in "Nondesignating Singular Terms", *Philosophical Review*, 68, 1959, pp. 239-43). Questa procedura è consigliabile, ma noi non l'abbiamo adottata qui poiché intendevamo dimostrare che la difficoltà può essere risolta senza correggere la teoria della quantificazione o la logica proposizionale modale.

¹⁴ W. V. O. Quine, *Mathematical Logic*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1940 (II edizione riveduta, 1951, pp. XII+346).

che possano essere asserite solo formule *chiuse*. L'asserzione di formule contenenti variabili libere è al massimo una comodità; l'asserzione di $A(x)$ con x libera può sempre essere sostituita dall'asserzione di $(x)A(x)$.

Se A è una formula contenente variabili libere, definiamo *chiusura* di A ogni formula priva di variabili libere ottenuta premettendo quantificatori universali e segni di necessità, in qualsiasi ordine, ad A . Stabiliamo dunque per definizione che gli assiomi di M quantificato saranno le chiusure degli schemi seguenti:

- (0) Tautologie vero-funzionali
- (1) $\Box A \supset A$
- (2) $\Box(A \supset B) \cdot \supset \cdot \Box A \supset \Box B$
- (3) $A \supset (x)A$, dove x non è libera in A
- (4) $(x)(A \supset B) \cdot \supset \cdot (x)A \supset (x)B$
- (5) $(y)((x)A(x) \supset A(y))$

La regola di inferenza è la separazione per l'implicazione materiale. La necessitazione può essere ottenuta come regola derivata.

Per ottenere estensioni quantificate di S4, S5 e del sistema brouweriano, si aggiungono semplicemente agli schemi di assiomi tutte le chiusure dell'appropriato assioma di riduzione.

I sistemi che abbiamo ottenuto hanno le seguenti proprietà. Essi sono delle semplici estensioni delle logiche proposizionali modali, senza le modifiche di Q di Prior; la regola di sostituzione vale senza restrizioni, diversamente che nella presentazione di Hintikka; e nondimeno non è derivabile né la formula della Barcan né la sua conversa. Inoltre, valgono tutte le leggi della teoria della quantificazione – modificate in modo da ammettere il dominio vuoto. Il teorema di completezza semantica che avevamo dato per la logica proposizionale modale può essere esteso ai nuovi sistemi.

Se vogliamo, nel presente sistema possiamo introdurre l'*esistenza come un predicato*. Da un punto di vista semantico, l'esistenza è un predicato monadico $E(x)$ che soddisfa, per ogni modello φ su una s.m. (G, K, R) , l'identità $\varphi(E, H) = \varphi(H)$ per ogni $H \in K$. Assiomaticamente, possiamo introdurlo attraverso la postulazione delle chiusure delle formule della forma $(x)A(x) \wedge E(y) \cdot \supset \cdot A(y)$ e $(x)E(x)$. Il predicato P usato so-

pra nel controesempio rispetto alla conversa della formula della Barcan può ora essere riconosciuto come il predicato di esistenza. Questo mostra in qual senso l'esistenza differisca dal predicato tautologico $A(x) \vee \sim A(x)$, nonostante la dimostrabilità di $\Box(x)E(x)$. Infatti, sebbene $(x)\Box(A(x) \vee \sim A(x))$ sia valido, $(x)\Box E(x)$ non lo è: per quanto sia necessario che ogni cosa esista, non ne segue che ogni cosa abbia la proprietà di esistere necessariamente.

Nella teoria dei modelli possiamo introdurre l'identità semanticamente stabilendo per definizione che $x = y$ sia vera in un mondo H quando a x e a y è assegnato lo stesso valore, e che altrimenti essa sia falsa; l'esistenza potrebbe esser definita in termini di identità, stipulando che $E(x)$ significhi $(\exists y)(x = y)$. Per ragioni non presentate qui, una teoria più generale dell'identità potrebbe essere ottenuta complicando la nozione di struttura modello quantificazionale.

Concludiamo con alcune brevi e sommarie osservazioni sull'interpretazione della logica modale in termini di "dimostrabilità", che daremo in ogni caso solo per il calcolo proposizionale. Il lettore avrà raggiunto i risultati principali del presente scritto anche se ometterà questa sezione. Le interpretazioni in termini di dimostrabilità sono fondate sul desiderio di aggiungere un operatore di necessità a un sistema formale, diciamo l'aritmetica di Peano, in modo tale che, per ogni formula A del sistema, $\Box A$ sia interpretata come vera se e solo se A è dimostrabile nel sistema. Si è sostenuto che tali interpretazioni di un operatore modale in termini di "dimostrabilità" sono eliminabili in favore di un *predicato* di dimostrabilità, attribuito al numero di Gödel di A , ma il recente contributo del professor Montague solleva almeno alcuni dubbi su questa posizione.

Consideriamo il sistema formale PA dell'aritmetica di Peano, come è formalizzato in Kleene.¹⁵ Aggiungiamo alle regole di formazione gli operatori \wedge , \sim e \Box (la congiunzione e la negazione aggiunte vanno distinte da quelle del sistema originale), che si applicano solo a formulæ chiuse. Nella teoria dei modelli che abbiamo presentato prima, assumevamo che le formule atomiche fossero variabili proposizionali o lettere predicative seguite da variabili individuali tra parentesi; qui assumiamo invece che esse siano semplicemente le formule ben formate chiuse

¹⁵ S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, New York, D. van Nostrand, 1952, pp. X+550).

di \mathbf{PA} (non solo le formule atomiche di \mathbf{PA}). Definiamo una struttura modello $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, \mathbf{R})$, dove \mathbf{K} è l'insieme di tutti i modelli numerabili distinti (non isomorfi) di \mathbf{PA} , \mathbf{G} è il modello standard costruito sui numeri naturali, e \mathbf{R} è il prodotto cartesiano \mathbf{K}^2 . Definiamo un modello φ richiedendo che, per ogni formula atomica P e ogni $\mathbf{H} \in \mathbf{K}$, $\varphi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{V}(\mathbf{F})$ se e solo se P è vera (falsa) nel modello \mathbf{H} . (Si ricordi che P è una formula ben formata di \mathbf{PA} e \mathbf{H} è un modello numerabile di \mathbf{PA}). Costruiamo quindi la valutazione per formule composte come prima.¹⁶ Dire che A è vera significa dire che è vera nel mondo reale \mathbf{G} , e, per ogni P atomica, $\varphi(\Box P, \mathbf{G}) = \mathbf{V}$ se e solo se P è dimostrabile in \mathbf{PA} . (Si noti che $\varphi(P, \mathbf{G}) = \mathbf{V}$ se e solo se P è vera in senso intuitivo). Poiché $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, \mathbf{R})$ è una s.m. S5, tutte le leggi di S5 saranno valide in questa interpretazione, e possiamo dimostrare che solo le leggi di S5 saranno valide in generale. (Per esempio, se P è la formula indecidibile di Gödel, $\varphi(\Box P \vee \Box \sim P, \mathbf{G}) = \mathbf{F}$, il che costituisce un controesempio rispetto alla "legge" $\Box A \vee \Box \sim A$).

Un'altra interpretazione in termini di dimostrabilità è la seguente. Assumiamo ancora che le formule atomiche siano le formule ben formate chiuse di \mathbf{PA} , e costruiamo quindi nuove formule usando i connettivi aggiuntivi \wedge , \sim e \Box . Sia \mathbf{K} l'insieme di tutte le coppie ordinate (\mathbf{E}, α) , dove \mathbf{E} è un'estensione consistente di \mathbf{PA} , e α è un modello (numerabile) del sistema \mathbf{E} . Sia $\mathbf{G} = (\mathbf{PA}, \alpha_0)$, dove α_0 è il modello standard di \mathbf{PA} . Diremo che $(\mathbf{E}, \alpha) \mathbf{R} (\mathbf{E}', \alpha')$, dove (\mathbf{E}, α) e (\mathbf{E}', α') sono in \mathbf{K} , se e solo se \mathbf{E}' è un'estensione di \mathbf{E} . Per P atomica, definiamo $\varphi(P, (\mathbf{E}, \alpha)) = \mathbf{V}(\mathbf{F})$ se e solo se P è vera (falsa) in α . Possiamo allora dimostrare, per P atomica, che $\varphi(\Box P, (\mathbf{E}, \alpha)) = \mathbf{V}$ se e solo se P è dimostrabile in \mathbf{E} ; in particolare, $\varphi(\Box P, \mathbf{G}) = \mathbf{V}$ se e solo se P è dimostrabile in \mathbf{PA} . Poiché $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, \mathbf{R})$ è una s.m. S4, tutte le leggi di S4 valgono. Non valgono però tutte le leggi di S5: se P è la formula indecidibile di Gödel, $\varphi(\sim \Box P \supset$

$\supset \Box \sim \Box P$), $\mathbf{G}) = \mathbf{F}$. Ma sono valide anche alcune leggi che non sono dimostrabili in S4: in particolare possiamo dimostrare, per ogni A , $\varphi(\Box \sim \Box(\Diamond A \wedge \Diamond \sim A), \mathbf{G}) = \mathbf{V}$, donde si possono derivare i teoremi del sistema S4.1 di McKinsey.¹⁷ Tale difficoltà potrebbe essere eliminata con opportune modifiche, ma non entreremo qui nel merito della questione.

Si potrebbero costruire interpretazioni analoghe di M e del sistema *brouweriano*, ma, secondo l'opinione di chi scrive, queste sono meno interessanti di quelle presentate sopra. Facciamo cenno ancora a una classe di interpretazioni in termini di dimostrabilità, le estensioni "riflessive" di \mathbf{PA} . Sia \mathbf{E} un sistema formale contenente \mathbf{PA} , le cui formule ben formate siano formate a partire dalle formule chiuse di \mathbf{PA} facendo uso dei connettivi $\&$, \neg e \Box . (Userò " $\&$ " e " \neg " per indicare che sto utilizzando la stessa congiunzione e negazione di \mathbf{PA} , e non ne sto introducendo delle nuove. Vedi la nota 16, pag. 92). \mathbf{E} è detta allora estensione riflessiva di \mathbf{PA} se e solo se: (1) è un'estensione inessenziale di \mathbf{PA} , (2) $\Box A$ è dimostrabile in \mathbf{E} se e solo se lo è A , (3) c'è una valutazione α , che porta dalle formule chiuse di \mathbf{E} sull'insieme $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$, tale che la congiunzione e la negazione rispettano le comuni tavole di verità, tutte le formule chiuse vere di \mathbf{PA} prendono il valore \mathbf{V} , $\alpha(\Box A) = \mathbf{V}$ se e solo se A è dimostrabile in \mathbf{E} , e tutti i teoremi di \mathbf{E} prendono il valore \mathbf{V} . Si può dimostrare che esistono estensioni riflessive di \mathbf{PA} contenenti gli assiomi di S4 o anche di S4.1, ma nessuna contenente quelli di S5.

Infine, osserviamo che, usando la comune rappresentazione della logica intuizionista in S4, possiamo ottenere una teoria dei modelli per il calcolo predicativo intuizionistico. Non daremo qui questa teoria dei modelli, ma ricorderemo invece, limitatamente al calcolo proposizionale, un'interpretazione particolarmente utile della logica intuizionistica che risulta dalla teoria dei modelli. Sia \mathbf{E} una qualsiasi estensione consistente di \mathbf{PA} . Diciamo che una formula P di \mathbf{PA} è verificata in \mathbf{E} se e solo se è dimostrabile in \mathbf{E} : Prendiamo le formule ben formate chiuse P di \mathbf{PA} come formule atomiche, e costruiamo formule su di esse usando i connettivi intuizionistici \wedge , \vee , \neg e \supset . Stabiliamo quindi per induzione: $A \wedge B$ è verificata in \mathbf{E} se e solo se lo sono A e B ; $A \vee B$ è verificata in \mathbf{E} se e solo se

¹⁷ Cfr. J. C. C. McKinsey, "On the Syntactical Construction of Systems of Modal Logic", *Journal of Symbolic Logic*, 10, 1945, pp. 83-94.

¹⁶ Si può obiettare che \mathbf{PA} contiene già dei simboli per la congiunzione e la negazione, diciamo " $\&$ " e " \neg ": perché dunque aggiungere i nuovi simboli " \wedge " e " \sim "? La risposta è che, se P e Q sono formule atomiche, allora anche $P \& Q$ è atomica nel presente senso, poiché è ben formata in \mathbf{PA} , ma $P \wedge Q$ non lo è. Per poter applicare la precedente dottrina, nella quale la congiunzione di formule atomiche non è atomica, abbiamo bisogno di " \wedge ". Nondimeno, per ogni $\mathbf{H} \in \mathbf{K}$ e P e Q atomiche, $\varphi(P \& Q, \mathbf{H}) = \varphi(P \wedge Q, \mathbf{H})$, cosicché la confusione di " $\&$ " con " \wedge " non causa in pratica alcun danno. Osservazioni analoghe si applicano alla negazione, e all'interpretazione in termini di dimostrabilità di S4 del prossimo paragrafo.

lo è A o lo è B ; $\neg A$ è verificata in \mathbf{E} se e solo se non vi è alcuna estensione consistente di \mathbf{E} che verifica A ; $A \supset B$ è verificata in \mathbf{E} se e solo se ogni estensione consistente \mathbf{E}' di \mathbf{E} che verifica A verifica anche B .

Ogni esempio di una legge della logica intuizionistica è allora verificato in \mathbf{PA} , ma, per esempio, non lo è $A \vee \neg A$, se A è la formula indecidibile di Gödel. In un lavoro futuro, estenderemo ulteriormente questa interpretazione, e dimostreremo che facendone uso è possibile trovare un'interpretazione per il sistema FC di Kreisel delle successioni di scelte assolutamente libere.¹⁸ È chiaro, incidentalmente, che nelle interpretazioni in termini di dimostrabilità di S4 e S5 \mathbf{PA} può essere sostituito da qualsiasi altro sistema vero-funzionale (cioè da qualsiasi sistema i cui modelli determinino ogni formula chiusa come vera o falsa), mentre l'interpretazione dell'intuizionismo si applica a tutti i sistemi formali di qualsiasi natura.

¹⁸ G. Kreisel, "A Remark on Free Choice Sequences and the Topological Completeness' Proofs", *Journal of Symbolic Logic*, 23, 1958, pp. 369-88.

VI

TERENCE PARSONS

ESSENZIALISMO
E LOGICA MODALE QUANTIFICATA * 1

I problemi relativi all'essenzialismo stanno ricevendo grande attenzione da parte di logici modali e filosofi. Anche uno sguardo affrettato alle opere su questo argomento, tuttavia, rivela subito che vi sono molte dottrine che vanno sotto questo nome. Io isolerò e discuterò una di queste dottrine. In particolare, dopo aver isolato una versione dell'essenzialismo (Sezioni I e II), dimostrerò che il lavoro sulla logica modale quantificata può essere ed è indipendente dalla verità di tale dottrina (Sezioni III-V). Nell'ultima sezione (la sesta) tenterò di mostrare, sulla base di fatti stabiliti nelle Sezioni III-V, il motivo per cui questa particolare forma di essenzialismo costituisce una dottrina sospetta da un punto di vista filosofico. Dimostrerò anche che il lavoro sulla logica modale quantificata non ha nemmeno bisogno di presupporre, *in un qualsiasi senso criticabile*, il fatto che le tesi essenzialistiche siano *dotate di significato*.

Le mie argomentazioni hanno come scopo (a) la chiarificazione di un tipo di essenzialismo e (b) una parziale giustificazione della logica modale quantificata.

I. CHIARIMENTO PRELIMINARE

Tanto per cominciare, distinguiamo le dottrine essenzialistiche in due generi. Un genere ha a che fare con quelle che chiamerò essenze *individuali* e l'altro con quelle che chiamerò es-

* Da *The Philosophical Review*, LXXVIII, 1 (Gennaio 1969), pp. 35-52. Ristampato per concessione dell'autore e della *Philosophical Review*.

¹ Oltre che con gli autori citati nello scritto, ho un debito particolare verso John Vickers e Kathryn Pyne Parsons per i commenti fatti a precedenti stesure del saggio, e verso il relatore della *Philosophical Review* per l'aiuto che mi ha dato nel migliorare la stesura definitiva.